

Title	非線型写像による加速器ビームのモデル(乱流の発生と統計法則)
Author(s)	平田, 光司
Citation	数理解析研究所講究録 (1992), 800: 104-107
Issue Date	1992-08
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/82842">http://hdl.handle.net/2433/82842</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 非線型写像による加速器ビームのモデル

高エネルギー物理学研究所 平田光司 (Kohji Hirata)

加速器は高エネルギー実験を始め、物理学の様々な分野で、実験道具として活躍しているが、一方、加速器におけるビームの振る舞い自体が興味ある物理を含んでいることは、あまり認識されていない様である。ここでは、特に電子ビームに関する一問題に限定して、ビーム力学の紹介をする。

加速器の中で電子は塊 (bunch) となって運動している。一つの塊の中にはだいたい  $10^{11}$  個の電子が詰まっている。この塊は全体として加速器の中をぐるぐる回っているが、個々の電子も塊の中で運動する。塊の中心を原点にとった座標系で見ると、電子の運動はFokker-Planck方程式

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = [H, \psi] + \frac{\partial}{\partial p} (\beta p \psi) + D \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2}, \quad (1)$$

で記述できる。ここでHは、電子の収束用に外から与える力を表

し、第2項は減衰力、第3項は拡散力を表す。減衰力、拡散力ともに、電子が磁場中で行なうシンクロトロン輻射の効果である。なお  $s$  はリング上の位置を表す変数で周長を modulo として定義される。H が調和振動子の形をしている場合には  $\psi$  はガウス分布となる。H に非線型項があると (1) の定常解を求めることは一般に難しいが、自由度が1でHが  $s$  によらないならば、ボルツマン型の分布が得られる。

さて (1) には一体力だけしか書かれていないが、加速器の問題では、さらに二体力以上の作用も考えなければならないことも多い。その一つの例が以下に述べる bunch 伸張化の問題である。加速器中には様々な装置があって、その側を電子が通過すると電磁場が誘起され、それが後続の電子に影響を与える。この力は二体力と言うより、集団的な力として記述できて、(1) のHを分布  $\psi$  の汎関数と見做せば (1) がそのまま使える。この場合の定常解を求め、その安定性を調べるのが主な問題である。正攻法ではボルツマン分布

$$\psi = \exp\left[-\frac{H[\psi]}{T}\right],$$

(ここで  $T$  は  $H$  と  $D$  から決まる定数) を関数方程式として数値的に解き、その解の (1) のもとでの安定性を調べる。(解が

不安定だと相空間で乱流的な運動が起きる。これはまだあまり詳しくは調べられていない。)

しかし、電磁場が誘起される物体は、実はリング内に一様に分布している訳ではなく、 $H$ は $s$ による。この場合、ボルツマン分布を仮定できないので、伝統的な方法はゆきずまる。この点を改良するために筆者は電磁場が誘起される物体がリングの一点に局在している状況を調べた。

だいたいの様子を知るために、ガウス模型と呼ばれるモデルを作る。これは、電磁場が誘起される時、bunchの分布はガウス型であると仮定するものである。bunchの縦方向の運動のみを考えるので

$z$  bunch中心からの縦方向の変位

$E$  bunchの平均エネルギーからのずれ

を電子の運動を記述する正準座標にとる。このモデルで $H$ は $\psi$ の汎関数でなく、

$$H = H[x; \sigma]$$

の様に $\sigma$ ,  $z$ の標準偏差、の関数となり、同時に $\psi$ の変化も標準偏差にのみ注目すれば、すべてが標準偏差

$$\langle z^2 \rangle, \langle zE \rangle, \langle E^2 \rangle$$

だけで記述できる。この模型を解析的、また数値的に調べると、系には分岐があり、また履歴現象もあることが分かった。全粒子数が少ない時は、系は一種の定常状態に落ち着く。つまりポアンカレ断面で見ていると周期1の運動になる。全粒子数があるしきい値を越えると周期2になるが、さらに大きな値になると周期1と周期2がどちらも安定になる。この場合、どちらが実現するかは過去の履歴による。

モデルによるこれらの予言は更に多粒子追跡シミュレーションによっても確認され、このような現象が実際にも起き得ることと、モデルが簡単な割には相当に信頼できることが確認された。より詳しくは、文末の文献を参照されたい。

電磁場が誘起される物体が局在する場合のbunch伸張化は、きわめて特種な例で、加速器のビーム力学には面白い問題がたくさん手つかずで残っている。ビーム力学の世界では、加速器の高度化にともなって、より現代的、より数学的な方向に転換が行なわれている最中であると思われる。

電磁場が誘起される物体が局在する場合のbunch伸張化の論文は

K. Hirata, S. Petracca and F. Ruggiero, Phys. Rev. Lett. 66,1693(1991),

似たようなモデルで別の問題を扱ったのが

K. Hirata, Phys. Rev. Lett. 58,25(1987),

にある。